数理解析研究所講究録 1294 巻 2002 年 8-26

ジョルダン三項積の成層分解と対称空間への応用

日本工業大学・工学部 金行 壯二(Soji Kaneyuki)
Nihon Institute of Technology

表題でいうジョルダン三項積とはpracticalには単純オ1種階別リー環(GLAと略記) $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_{-1}+\mathfrak{g}_0+\mathfrak{g}_1$ の部分空間 $\mathfrak{g}_1$ の事である。この様なGLAの分类と実現から種々の行列空間(実又は複素で古典型又は例外型)は単純オ1種GLAの部分空間 $\mathfrak{g}_1$ として現われる(cf. §1の表)。§1ではGLAのリー環論の言葉でこれらの行列空間を統一的に扱い $\mathfrak{g}_1$ 内のランク一定の元のなす集合への $\mathfrak{g}_1$ の分割が $\mathfrak{g}_1$ の代数幾何の意味での成層分解(stratification)なる事を示す(定理1.2)。§2では $\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_{-1}$ のコンパクト化である，旗多様体の直積 $\tilde{M}=G/U^-\times G/U^+$ を考える。ここに $\mathrm{Lie}\,G=\mathfrak{g}$, $\mathrm{Lie}\,U^{\pm}=\mathfrak{g}_0+\mathfrak{g}_{\pm1}$ である。§1の応用として，$\tilde{M}$ に G がdiagonalに作用する時の軌道分解が実解析多様体 $\tilde{M}$ の成層分解になる事を示す(定理2.7)。又 $\tilde{M}$ の C^∞ 微分同型が最大次元のstratumを保つならば実はすべてのstratumを保つ事を示、

す(定理2.8). ここでは述べる余裕がないがこれを用いて$\tilde{M}$の閉G軌道 — これは bi-Lagrange 対称空間になる — の二重葉層構造の自己同型群を決定する事ができる. 詳しくは[5]を参照されたい.

§1. ジョルダン三項積の成層分解.

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} + \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1 \tag{1.1}$$

を$\mathbb{R}$上の単純GLAとし, $Z \in \mathfrak{g}_0$をその特性元, つまりZは$\mathrm{ad}\,Z$が$\mathfrak{g}_k$上でスカラー作用素$k1$となる様な元とし, τを$\mathfrak{g}$の階別反転(i.e. $\tau(\mathfrak{g}_k) = \mathfrak{g}_{-k}$)カルタン対合としよう. 後の使用の為にリー環$\mathfrak{g}$の自己同型群$\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$のいくつかの部分群を定義しておこう:

G_0: GLAとしての$\mathfrak{g}$の自己同型群. これはZの$\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$での中心化群$C_{\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}}(Z)$と一致する. $\mathrm{Lie}\,G_0 = \mathfrak{g}_0$に注意.

G: G_0と随伴群$\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}$で生成される$\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$の閉部分群.

K: カルタン対合τできまるGの極大コンパクト部分群.

$K_0 := K \cap G_0$, K_0^0: K_0の単位元の連結成分.

$G_{\pm 1} := \exp \mathfrak{g}_{\pm 1} \subset G$.

$U^{\pm} := G_0 G_{\pm 1}$, これはGの極大放物型部分群で互いにopposite.

商空間$M^{\pm} = G/U^{\pm} = K/K \cap G_0$は$G$の商空間としては旗多様体, Kの商空間としては対称空間である. $M^{\pm}$は対称R空間

と云われる．r を対称空間 $M^{\pm}$ の階数とする．単純オ1種GLA に対して次の命題が基本的である．

命題1.1（[1, 7]）．(1,1)の単純GLA $\mathfrak{g}$ に対して，次の性質を持つ階別部分環 $\mathfrak{s} = \mathfrak{a}_{-1} + \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_1$ が存在する：

(i) $\mathfrak{s}$ は r 個の $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$-triplet

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})_i = \langle E_{-i}, \check{\beta}_i, E_i \rangle, \qquad 1 \leq i \leq r$$

のリー環の直和である．

(ii) $$\mathfrak{a}_{\pm 1} = \sum_{i=1}^{r} \mathbb{R} E_{\pm i} \subset \mathfrak{g}_{\pm 1},$$

$$\mathfrak{a}_0 = \sum_{i=1}^{r} \mathbb{R} \check{\beta}_i \subset \mathfrak{g}_0 .$$

(iii) $\mathfrak{g}_{\pm 1}$ の元は K_0^0 の作用で対角化される，即ち

$$\mathfrak{g}_{\pm 1} = K_0^0 \mathfrak{a}_{\pm 1} .$$

iv) $\mathfrak{a}_0$ に関する $\mathfrak{g}$ のルート系 $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_0)$ が存在する．Δ は BC_r 型又は C_r 型である．

Δ が BC_r 型又は C_r 型である時，GLA $\mathfrak{g}$ は BC_r 型又は C_r 型であるという．扨 $X \in \mathfrak{g}_1$ とすると，前命題よりある元 $g \in K_0^0$ が存在して $g \cdot X = \sum_{i=1}^{r} a_i E_i$ と書ける．この時ゼロでない係数 a_i の個数を X のランクといい $\mathrm{rk}\, X$ で表わす．これは X のみで一意的に定まる．そこで

$$V_k = \{ X \in \mathfrak{g}_1 : \mathrm{rk}\, X = k \}, \quad 0 \leq k \leq r \tag{1.2}$$

なる$\mathfrak{g}_1$の部分集合を考えよう. $\mathfrak{g}_1$は次の様に表わされる:

$$\mathfrak{g}_1 = \mathcal{V}_r \amalg \mathcal{V}_{r-1} \amalg \cdots \amalg \mathcal{V}_0 . \qquad (1.3)$$

これを$\mathfrak{g}_1$のランク分解という事にしよう. $\mathcal{V}_r$は$\mathfrak{g}_1$のZariski閉集合であり, $\mathcal{V}_0=(0)$である. 各$\mathcal{V}_k$は同次元のG_0軌道の合併として表わされる事に注意しておこう ($\mathcal{V}_k$自身が1つのG_0軌道になる場合もある). $\mathcal{V}_k$を式で表示する方法を述べよう. 先ず$o_k \in \mathfrak{a}_1$を

$$o_k = \sum_{i=1}^{k} E_i , \quad 1 \leq k \leq r, \qquad o_0 = 0$$

と定義すると$o_k \in \mathcal{V}_k$である. $\mathfrak{g}_1$の元x, y, zに対して3-線型写像(　　)を

$$(xyz) = \frac{1}{2}[[\tau(y), x], z] \in \mathfrak{g}_1$$

で定義すると, $(\mathfrak{g}_1, (\quad))$は階数$r$の単純ジョルダン三項積(JTSと略記)になる. $\mathfrak{g}$がC_r型なら更に$\mathfrak{g}_1$は単純ジョルダン代数になる. このJTSの2次作用素$P: \mathfrak{g}_1 \to \mathrm{End}\,\mathfrak{g}_1$が$P(x)y = (xyx)$で定義される. これを用いると$\mathcal{V}_k$は

$$\mathcal{V}_k = \{ X \in \mathfrak{g}_1 : \mathrm{rk}\, P(X) = i_k \}, \quad 0 \leq k \leq r, \qquad (1.4)$$

と表わされる. ここに$\mathrm{rk}\, P(X)$は行列$P(X)$の階数を表わす, 又$i_k = \mathrm{rk}\, P(o_k)$である. $\mathcal{V}_k$の$\mathfrak{g}_1$での閉包$\overline{\mathcal{V}_k}$は行列式多様体

$$\overline{\mathcal{V}_k} = \mathcal{V}_{\leq k} := \{ X \in \mathfrak{g}_1 : \mathrm{rk}\, P(X) \leq i_k \} \qquad (1.5)$$

で与えられる([2]). 特に$\overline{\mathcal{V}_k}$は代数多様体である. $\mathfrak{g}$が複素リー環の時は$\mathfrak{g}_1$は複素単純JTSになる. この場合$\mathfrak{g}_1$

のJTSとしての各実形を1つ定める事により $P(X)$ は $\mathbb{R}$ 上定義された多項式になる. 従って $\overline{V_k}$ は複素ベクトル空間 $\mathfrak{g}_1$ 内の $\mathbb{R}$ 上定義された代数多様体になる. $\mathfrak{g}$ が C_r 型の時, 単純ジョルダン代数 $\mathfrak{g}_1$ の generic norm ν を用いて V_r は

$$V_r = \{ X \in \mathfrak{g}_1 : \nu(X) \neq 0 \} \qquad (1.6)$$

と表わされる事に注意しておこう. ここでこの節の主定理を述べておこう. アフィン代数多様体 X の正則点の集合を $Reg(X)$, 特異点の集合を $Sing(X)$ で表わす.

<u>定理1.2</u>([5]). $r \geq 2$ ならば, 行列式多様体 $V_{\leq k} := \coprod_{i=0}^{k} V_i$ に対して次の事が成立つ:

$$\begin{aligned} Reg(V_{\leq k}) &= V_k , & 0 \leq k \leq r-1, \\ Sing(V_{\leq k}) &= V_{\leq k-1} , & 1 \leq k \leq r-1. \end{aligned} \qquad (1.7)$$

特に $r \geq 2$ ならば $\mathfrak{g}_1$ のランク分解 (1.3) は代数幾何の意味での $\mathfrak{g}_1$ の成層分解である.

以下この証明について述べよう. まず単純JTS $\mathfrak{g}_1$ の分類と実現が必要である. その表を掲げておこう.

複素単純 JTS

Type	$\mathfrak{g}_1$	r
I	$M_{p,q}(\mathbb{C})$, $p \leq q$	p

II	$\mathrm{Alt}_n(\mathbb{C})$	$[n/2]$
III	$\mathrm{Sym}_n(\mathbb{C})$	n
IV	$\mathbb{C}^n$	2
V	$M_{1,2}(\mathbb{O}^{\mathbb{C}})$	2
VI	$H_3(\mathbb{O}^{\mathbb{C}})$	3

実単純JTS及びその複素化

Type	$\mathfrak{g}_1$	r	$\mathfrak{g}_1^{\mathbb{C}}$	$\bar{r}$
I	$M_{p,q}(\mathbb{R}),\ p\leq q$	p	$M_{p,q}(\mathbb{C})$	p
	$M_{p,q}(\mathbb{H}),\ p\leq q$	p	$M_{2p,2q}(\mathbb{C})$	$2p$
	$H_n(\mathbb{C})$	n	$M_n(\mathbb{C})$	n
II	$\mathrm{Alt}_n(\mathbb{R})$	$n/2$	$\mathrm{Alt}_n(\mathbb{C})$	$n/2$
	$H_n(\mathbb{H})$	n	$\mathrm{Alt}_{2n}(\mathbb{C})$	n
III	$\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$	n	$\mathrm{Sym}_n(\mathbb{C})$	n
	$SH_n(\mathbb{H})$	n	$\mathrm{Sym}_{2n}(\mathbb{C})$	$2n$
IV	$\mathbb{R}^n_{p,q}$ $(p\leq q,\ p+q=n)$	$\begin{cases} 1 & (p=0) \\ 2 & (p\geq 1) \end{cases}$	$\mathbb{C}^n$	2
V	$M_{1,2}(\mathbb{O})$	1	$M_{1,2}(\mathbb{O}^{\mathbb{C}})$	2
	$M_{1,2}(\mathbb{O}')$	2		
VI	$H_3(\mathbb{O})$	3	$H_3(\mathbb{O}^{\mathbb{C}})$	3
	$H_3(\mathbb{O}')$	3		

上の表の記号の説明：$\mathbb{H}$は4元数環、$\mathbb{O}, \mathbb{O}', \mathbb{O}^{\mathbb{C}}$は夫々8元数

環，split 8元数環，複素8元数環，$H_n(\mathbb{F})$は$\mathbb{F}$の元を成分とするエルミート行列の空間，$SH_n(\mathbb{H})$は歪エルミート4元数n次行列の空間，$\mathbb{R}^n_{p,q}$は符号数が(p,q)の2次形式を備えた$\mathbb{R}^n$である．rは複素JTS $\mathfrak{g}_1^{\mathbb{C}}$のランクである．表からわかる様に$\mathfrak{g}_1$は複素又は実の，そして古典型又は例外型の行列空間である．I－III型の場合(1.2)式の$\mathrm{rk}\,X=k$という条件はXの行列としての階数と一致するか又はその1/2倍かのいずれかである．従ってこれらのタイプでは$V_{\leq k}$は代数幾何における通常の行列式多様体(determinantal variety)と一致する．

定理1.2の証明に移ろう．先ず$\mathfrak{g}_1$が複素JTSの場合を考えよう．I－III型の場合(1.7)はよく知られている(例えば[6])．IV，V，VI型の$V_{\leq 1}$を考えよう．最初の2つのタイプでは$r=2$であるから$V_{\leq 1}$のみが自明でない行列式多様体である．一般に行列式多様体はその定義より$\mathbb{C}^*$の作用で不変だからその定義イデアルは斉次である．又V_1上で消える恒等的にゼロでない1次形式は存在しない事が示される．これらからJacobiの判定法により$\mathrm{Sing}(V_{\leq 1})=V_0$が結論できる．残る1つはVI型の$V_{\leq 2}$である．この場合$\mathfrak{g}_1$はジョルダン代数であるから(1.6)より$V_{\leq 2}$は$\nu=0$で定義されJacobiの判定法より$\mathrm{Sing}(V_{\leq 2})=V_{\leq 1}$が示される．この際$\nu$の$G_0$-相対不変性を使えば計算が楽になる．最後に$\mathfrak{g}_1$が実JTSの場合は，$\mathfrak{g}_1$内の行列式多様体

$V_{\le k}$ は複素化 $\mathfrak{g}_1^{\mathbb{C}}$ 内の行列式多様体 $\tilde{V}_{\le k}$ ($\bar{r}=r$ の時) 又は $\tilde{V}_{\le 2k}$ ($\bar{r}=2r$ の時) の $\mathbb{R}$-rational な点のなす集合と一致する事 (一般的証明は例へば [7]) を用いれば複素の場合に帰着される. □

定理1.2 の証明の過程から次の命題が得られる.

<u>命題1.3</u> ([5]). 複素又は実の単純 JTS $\mathfrak{g}_1$ 内の行列式多様体 $V_{\le k}$ $(1\le k\le r-1)$ に対して, 次の条件を充す定義イデアル $I(V_{\le k})$ の基底 $\{f_1,\cdots,f_{s_k}\}$ が存在する: 各 f_i は $\mathbb{R}$ 上定義された多項式で各点 $p\in Sing(V_{\le k})$ に対して $(df_i)_p=0$ となる.

§2. 対称R空間の直積の成層分解

前節で現われた対称R空間 $M^{\pm}$ の直積 $\tilde{M}=M^-\times M^+$ は直積群 $G\times G$ の商空間であるからその対角線部分群として G は $\tilde{M}$ に作用する. この作用の下での $\tilde{M}$ の軌道構造は [3] で研究された. (正確に云うとそこでは G の単位元の連結成分 G^0 による軌道構造が考察されているが, これは G 軌道と一致する事が示される.). これについて述べておこう. G の元 a_k $(0\le k\le r)$ を次式で定義する:

$$a_k=\exp\left(-\frac{\pi}{2}\sum_{i=1}^{k}(E_i-E_{-i})\right),\ 1\le k\le r\ ;\quad a_0=1.$$

商空間 $M^{\pm}$ の原点を $o^{\pm}$ で表わしておく. 又 $\tilde{M}$ の点 $(o^-, a_{r-k}o^+)$ を通る G 軌道を M_k で表わす. 即ち $M_k=G(o^-, a_{r-k}o^+)$ とすると次の定理が成立つ:

定理2.1([5,3]).

(i)
$$\tilde{M} = M_r \amalg M_{r-1} \amalg \cdots \amalg M_0, \tag{2.1}$$
$$\dim \tilde{M} = \dim M_r > \dim M_{r-1} > \cdots > \dim M_0$$
が成立つ.

(ii) M_k の $\tilde{M}$ での閉包を $\overline{M}_k$ で表わすと
$$\overline{M}_k = M_{\le k} := M_k \amalg M_{k-1} \amalg \cdots \amalg M_0, \quad 0 \le k \le r.$$

(iii) GLA $\mathfrak{g}$ が BC_r 型ならば, 最小軌道 M_0 は G の複多様体で $\tilde{M}$ の直積構造から引起される二重葉層構造 $F_0^{\pm}$ をもつ(これをpartial bi-Lagrangian構造という). その葉体の集合は下記の二重束のファイバーの集合と一致する. $\mathfrak{g}$ が C_r 型ならば,

$$\begin{tikzcd} & M_0 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ G/U^- = M^- & & G/a_r U^+ a_r^{-1} \end{tikzcd}$$

$a_r U^+ a_r^{-1} = U^-$ となり従って $a_r o^+ = o^-$, $M_0 = M^-$ が成立つ. そして $F_0^{\pm}$ は自明になる.

ここで稠密開軌道 M_r について若干述べておこう. M_r は G の商空間として $M_r = G/U^- \cap U^+ = G/G_0$ と表わされ, これは対称対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0)$ に対応する対称空間である. この対称空間はバイ・ラグランジュ対称空間(又はパラエルミート対称空間)と呼ばれる. §1でみた様に G_0 は元 Z の $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ での中心化群と一致するので, M_r はリー環 $\mathfrak{g}$ 内に Z を通る随伴 G 軌道(これは双曲軌道)とし

て実現される．従って M_r は自然な G 不変 symplectic 構造 ω を持つ．M_r 上には $\tilde{M}$ の直積構造から自然に二重葉層構造 $F^{\pm}$ が定義される．そしてその葉体は ω に関してラグランジュ部分多様体になる．

2.2．(2.1) で与えた $\tilde{M}$ の軌道分解が実解析多様体 $\tilde{M}$ の成層分解なる事を示したい．これは 2.3 で示さるであろう．この為に $\tilde{M}$ に稠密な開集合として入っている或ベクトル空間をとり，それと軌道との交わりをこのベクトル空間内で式で表わす．これを軌道の実現という（余談であるが，有界対称領域の Harish-Chandra の実現はこの種のものである）．各軌道の実現がある行列式多様体上の自明なファイバー束になる事を示したいと思う．

補題 2.2（[5]）．(1.1) の単純 GLA $\mathfrak{g}$ が BC_r 型とする．この時 $\mathfrak{g}$ は次の性質を充す第2種の階別付

$$\mathfrak{g} = \sum_{k=-2}^{2} \mathfrak{g}_k^* \tag{2.2}$$

を許容する：

(i) $\mathfrak{g}_{\pm 1}^*$ は $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}_0^*$ 不変な同次元可換部分空間の直和に分解する：

$$\mathfrak{g}_{\pm 1}^* = \mathfrak{g}_{\pm 1}^{*+} + \mathfrak{g}_{\pm 1}^{*-}. \tag{2.3}$$

(ii) $\mathfrak{g}_{-1} = \mathfrak{g}_{-2}^* + \mathfrak{g}_{-1}^{*+}$，$\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_1^{*-} + \mathfrak{g}_2^*$，

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_{-1}^{*-} + \mathfrak{g}_0^* + \mathfrak{g}_1^{*+}.$$

(iii) $(\mathrm{Ad}\,a_r)\mathfrak{g}^*_k = \mathfrak{g}^*_{-k}$, $(\mathrm{Ad}\,a_r)\mathfrak{g}^{*+}_{\pm1} = \mathfrak{g}^{*+}_{\mp1}$.

(iv) $\mathrm{Lie}(U^-\cap a_rU^+a_r^{-1}) = \mathfrak{g}^*_{-2}+\mathfrak{g}^*_{-1}+\mathfrak{g}^*_0$.

上の補題で $\mathfrak{g}$ が C_r 型ならば $\mathfrak{g}^*_{\pm1}=(0)$, $\mathfrak{g}^*_{\pm2}=\mathfrak{g}_{\pm1}$, $\mathfrak{g}^*_0=\mathfrak{g}_0$ となり (2.2) と (1.1) は本質的に一致する. 第2種単純GLAの分類[4]を用いると補題2.2の条件を充す第2種単純GLAを決定する事が出来る. それらは実単純なもの5個と複素単純なもの3個から成る. 補題2.2の幾何学的背景について述べておこう. 最小軌道 M_0 は $M_0=G/U^-\cap a_rU^+a_r^{-1}$ と表わされるから, (iv)より $\mathfrak{g}^*_1+\mathfrak{g}^*_2$ は点 (o^-, a_ro^+) での M_0 の接空間とみなされる. この時 $\mathfrak{g}^*_1$ の分解 (2.3) は M_0 の *partial bi-Lagrangian* 構造に対応している.

扨直積群 $G\times G$ は $\tilde{M}$ に推移的に作用し点 (o^-,a_ro^+) での固定部分群は $U^-\times a_rU^+a_r^{-1}$ で与えられるから $\tilde{M}$ は商空間として

$$\tilde{M} = G/U^- \times G/a_rU^+a_r^{-1}$$

と表わされる. 今 $\mathfrak{g}_1' := (\mathrm{Ad}\,a_r)\mathfrak{g}_{-1}$ とおくと $G\times G$ のリー環 $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}$ 内で部分環

$$\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_1' = (\mathfrak{g}^*_2+\mathfrak{g}^{*-}_1)\oplus(\mathfrak{g}^*_2+\mathfrak{g}^{*+}_1) \qquad (2.4)$$

は $\mathrm{Lie}(U^-\times a_rU^+a_r^{-1}) = (\mathfrak{g}_0+\mathfrak{g}_{-1})\oplus(\mathrm{Ad}\,a_r)(\mathfrak{g}_0+\mathfrak{g}_1)$ の補空間になっている(補題2.2). 部分環 $\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_1'$ は $G\times G$ の部分群 $G_1\times a_rG_{-1}a_r^{-1}$ を生成する. この部分群が $\tilde{M}$ に作用する時の点

$(o^-, a_r o^+)$ を通る軌道 Ω は唯一つの閉軌道である事がわかる．$\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_1'$ から Ω の上への写像 ξ を

$$\xi(X, Y) = (\exp X \cdot o^-, \exp Y \cdot a_r o^+)$$

で定義すると，ξ は $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_1'$ から Ω の上への微分同型になる．今後 ξ により $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_1'$ と Ω を同一視する事にする．$G_1 \times a_r G_{-1} a_r^{-1}$ の $\tilde{M}$ 上の特異軌道の合併は $\tilde{M}$ 内で余次元 1 の実解析集合になる事が示される．従って

$$\begin{aligned} M_k^* &:= M_k \cap (\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_1') \\ M_{\leq k}^* &:= M_{\leq k} \cap (\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_1') \end{aligned} \tag{2.5}$$

とおくと，M_k^* 及び $M_{\leq k}^*$ は夫々 M_k 及び $M_{\leq k}$ の稠密開集合になる．(2.1), (2.5) より

$$\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_1' = M_r^* \amalg M_{r-1}^* \amalg \cdots \amalg M_0^* \tag{2.6}$$

が成立つ．以下 $\mathfrak{g}$ が BC_r 型として話を進めよう．次の様に定義される写像 $\Phi : \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_1' \to \mathfrak{g}_2^*$ を考えよう：$X = (x, u^-) \in \mathfrak{g}_2^* + \mathfrak{g}_1^{*-} = \mathfrak{g}_1$ と $Y = (y, v^+) \in \mathfrak{g}_2^* + \mathfrak{g}_1^{*+} = \mathfrak{g}_1'$ に対して

$$\Phi(X, Y) = y - x + [v^+, u^-] \tag{2.7}$$

と定義する．Φ は田中 [8] で導入されたものである．他方 GLA (2.2) の階別部分環

$$\mathfrak{g}_{ev}^* = \mathfrak{g}_{-2}^* + [\mathfrak{g}_{-2}^*, \mathfrak{g}_2^*] + \mathfrak{g}_2^*$$

は C 型の第 1 種単純 GLA になる ([4])．従って $\mathfrak{g}_2^*$ は単純ジョルダン代数になり (1.3) と同様に $\mathfrak{g}_2^*$ のランク分解

$$\mathfrak{g}_2^* = \mathcal{V}_r \amalg \mathcal{V}_{r-1} \amalg \cdots \amalg \mathcal{V}_0 \qquad (2.8)$$

が成立つ．次の定理が示す様に２つの分解(2.6)と(2.8)はΦにより１対１に対応している．

<u>定理2.3</u>（[5]）．$0 \le k \le r$とする．軌道M_kの$\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_1'$内の実現$M_k^*$は次の様に与へられる：

$$M_k^* = \Phi^{-1}(\mathcal{V}_k)$$
$$= \{(x, u^-) \oplus (y, v^+) \in \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_1' \,;\, \mathrm{rk}\, P(y - x + [v^+, u^-]) = i_k\},$$

ここにi_kは(1.4)のそれと同じ．M_k^*の$\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_1'$での閉包$\overline{M_k^*}$は

$$\overline{M_k^*} = M_{\le k}^* = \Phi^{-1}(\mathcal{V}_{\le k})$$
$$= \{(x, u^-) \oplus (y, v^+) \in \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_1' : \mathrm{rk}\, P(y - x + [v^+, u^-]) \le i_k\}$$

で与えられる．特にジョルダン代数$\mathfrak{g}_2^*$のgenericノルムνを用いると

$$M_r^* = \Phi^{-1}(\mathcal{V}_r)$$
$$= \{(x, u^-) \oplus (y, v^+) \in \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_1' \,:\, \nu(y - x + [v^+, u^-]) \neq 0\}$$

と表わされる．$\mathfrak{g}$がC_r型の時は上の三つの式において$\mathfrak{g}_1' = \mathfrak{g}_1$であり$u^- = v^+ = 0$である．

上の定理から閉包$\overline{M_k^*}$は$\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_1'$の代数多様体であり，分解(2.6)は$\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_1'$の一種のランク分解と考えられる．

2.3. $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_1'$及$\tilde{M}$の成層分解

実解析多様体の成層分解の定義を与えておこう. Mを実解析多様体, EをMの実解析集合とする. 点$p\in E$がEの正則点とはpのMでの或近傍Uが存在して$E\cap U$はEに含まれる最大次元のMの実解析部分多様体になる事である. 正則点でないEの点をEの特異点という.

<u>定義2.4.</u> 実解析多様体Mの分割$M=\coprod_{k=0}^{s}A_k$がMの成層分解であるとは次の三条件が充される事である:

(i) 各A_kはMの実解析部分多様体である.

(ii) A_kの閉包$\overline{A_k}$はMの実解析集合であり, 且$A_{\le k}:=\coprod_{i=0}^{k}A_i$と一致する $(0\le k\le s)$.

(iii) $\overline{A_k}$の特異点集合$\mathrm{Sing}(\overline{A_k})$は$A_{\le k-1}$と一致する$(1\le k\le s-1)$.
(同じ事であるが, $\overline{A_k}$の正則点の集合$\mathrm{Reg}(\overline{A_k})$は$A_k$と一致する)

扨, 群Gの一般化された Heisenberg 部分群$N:=\exp\mathfrak{n}$, $\mathfrak{n}=\mathfrak{g}_1^*+\mathfrak{g}_2^*$を考えよう. Nはξを通じて$\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_1'$にアフィン変換として free に作用する. そして$\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_1'$から$\mathfrak{g}_2^*$の上への写像$\Phi$の各ファイバーは1つの$N$軌道になる. $\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_1'$の点$p$を(2.4)に従って$p=X\oplus Y=(x,u^-)\oplus(y,v^+)$と表わしておく. 多項式写像$\Psi$: $\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_1'\to\mathfrak{g}_2^*\times\mathfrak{n}$を

$$\Psi(p)=\left(\Phi(p),\ -x+\tfrac{1}{2}[v^+,u^-]-v^+-u^-\right)$$

により定義すると, Ψは上への微分同型であり逆写像も多項

式写像になる．これより次の命題が得られる．

命題2.5. $\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_1$ 内の代数多様体 $M^*_{\leq k}$ $(0\leq k\leq r-1)$ と $\mathfrak{g}_2^*\times\mathfrak{n}$ 内の代数多様体 $V_{\leq k}\times\mathfrak{n}$ は Ψ の下で同型である．そして

$$\mathrm{Sing}(M^*_{\leq k})=\Phi^{-1}(\mathrm{Sing}(V_{\leq k})),\qquad 1\leq k\leq r-1,$$

が成立つ．

これと定理1.2，定理2.3から次の定理が得られる．

定理2.6. 代数多様体 $M^*_{\leq k}$ $(1\leq k\leq r-1)$ に対して

$$\mathrm{Sing}(M^*_{\leq k})=M^*_{\leq k-1}\ ,\qquad \mathrm{Reg}(M^*_{\leq k})=M^*_k$$

が成立つ．特に $r\geqq 2$ ならばランク分解(2.6)は代数幾何の意味での成層分解である．

これより次の目標の定理が得られる．

定理2.7.([5]) $r\geqq 2$ ならば，実解析多様体 $\tilde{M}$ の G 軌道分解(2.1)は成層分解である．

証明. 定義2.4の(ii)は $M^*_{\leq k}$ が代数多様体なることと $M_{\leq k}=G(M^*_{\leq k})$ から従う．(iii)について述べよう．$M^*_{\leq k}$ の点 p に対して，p が代数多様体 $M^*_{\leq k}$ の正則点なる事と実解析集合としての $M^*_{\leq k}$ の正則点なる事は同値である．よって

$$\mathrm{Reg}(M_{\leq k})=G(\mathrm{Reg}(M^*_{\leq k}))=G(M^*_k)=M_k$$

となり，従って $\mathrm{Sing}(M_{\leq k})=M_{\leq k-1}$ となる．□

2.4. $\tilde{M}$の成層分解のC^∞-安定性

今迄の結果を用いて次の定理を証明しよう.

定理2.8 ([5]). fを$\tilde{M}$の滑らかな(i.e. C^∞級)微分同型としよう. もしfがM_rを保つならばfは他のすべてのM_k $(0\leq k\leq r-1)$を保つ.

証明. $r=1$ならば主張は明白であるから, $r\geqq 2$と仮定しよう. この時fは$M_{\leq r-1}$を保つから$1\leq k\leq r-1$なるkに対して

$$f(M_{\leq k})=M_{\leq k} \implies f(M_k)=M_k \tag{2.9}$$

を示せばよい. $f(M_k)^*:=f(M_k)\cap(\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_1')$とおくと, 仮定より$f(M_k)\subset M_{\leq k}$であるから$f(M_k)^*\subset M_{\leq k}^*$. そして$f(M_k)^*$は代数多様体$M_{\leq k}^*$の通常の位相での滑らかな開部分多様体である. 今点$p\in f(M_k)^*$を取ろう. この時pの$\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_1'$内での適当な近傍内で$f(M_k)^*$と$M_{\leq k}^*$は同じ定義方程式で表わされる. 従って接空間$T_pM_{\leq k}^*$の次元について次の式が成立つ.

$$\begin{aligned}\dim T_pM_{\leq k}^* &= \dim T_p(f(M_k)^*)=\dim f(M_k)^*=\dim M_k=\dim M_k^*\\ &=\dim\Phi^{-1}(V_k)=\dim V_k+\dim\mathfrak{n}.\end{aligned}$$

他方命題2.5より

$$\dim T_pM_{\leq k}^*=\dim T_{\Psi(p)}(V_{\leq k}\times\mathfrak{n})=\dim T_{\Phi(p)}(V_{\leq k})+\dim\mathfrak{n}.$$

従って$\dim T_{\Phi(p)}(V_{\leq k})=\dim V_k$が成立つ. よって命題1.3より$\Phi(p)\in V_k$, 従って$p\in\Phi^{-1}(V_k)=M_k^*$でなければならない. 故に

$$f(M_k)^*\subset M_k^* \tag{2.10}$$

が示された、次に包含 $f(M_k) \subset M_k$ を示そう。これが真でないと仮定すると $f(M_k) \cap M_{\le k-1} \neq \emptyset$ である。他方 $M^*_{\le k-1}$ は $M_{\le k-1}$ 内で稠密であるから $f(M_k)^* \cap M^*_{\le k-1} = f(M_k) \cap M^*_{\le k-1} \neq \emptyset$。これは (2.10) に矛盾する。故に $f(M_k) \subset M_k$ が示された。(2.9) の仮定において f を f^{-1} でおきかえて上と同様の議論を行うと $M_k \subset f(M_k)$ が得られ (2.9) が示された事になる。□

§3. Bi-Lagrange 対称空間への応用

§2で述べた様に $\tilde{M}$ 内の G による開軌道 $M_r = G/G_0$ はシンプレクティック対称空間であり G 不変な2つのラグランジュ葉層構造を持つ。つまり $(M_r, F^{\pm})$ は bi-Lagrange 対称空間になる。$F^{\pm}$ を不変にする M_r の C^∞ 微分同型のなす群を $(M_r, F^{\pm})$ の自己同型群といい、$\mathrm{Aut}(M_r, F^{\pm})$ で表わす。定理2.8と田中[8]の結果を用いてこの群を決定する事が出来る。それについて結果と概略を述べよう。まず記号の説明をしておこう。最小軌道 M_0 の partial bi-Lagrange 構造 $F_0^{\pm}$ の自己同型群を $\mathrm{Aut}(M_0, F_0^{\pm})$ で表わす。又対称R空間 $M^- = G/U^-$ の原点 o^- での接空間を $\mathfrak{g}_1$ と同一視しておき、そのランク分解で現われる $V_{\le r-1}$ に注目しよう。$V_{\le r-1}$ は $\mathfrak{g}_1$ 内の G_0 不変な錐であるから $V_{\le r-1}$ を G の作用で M^- 上の錐の場に拡張する事が出来る。この錐の場を一般化された共形構造といい $\mathcal{K}$ で表わす。$\mathcal{K}$ を不変にする M^- の C^∞ 微分同型のなす群を $\mathrm{Aut}(M^-, \mathcal{K})$ で表わす。こ

の群は[2]で決定された. 尚 $\mathfrak{g}$ が C_1 型の時は M_r は商空間 $SO^0(1,n+1)/SO(n)\cdot\mathbb{R}^+$ であり対応する M^- は n 次元球面 S^n である.

定理3.1([5]). (1.1)の単純GLA $\mathfrak{g}$ が BC_r 型の時,

$$Aut(M_r,F^\pm)\simeq Aut(M_0,F_0^\pm)\simeq G,$$

$\mathfrak{g}$ が C_r 型の時,

$$Aut(M_r,F^\pm)\simeq Aut(M^-,K)=\begin{cases}G, & r\geq 2,\\ Diffeo(S^n), & r=1.\end{cases}$$

但し $Diffeo(\cdot)$ は微分同型のなす群を表わす.

この定理は $\mathfrak{g}$ が古典型の時は少し弱い形で田中[8]により得られている. 定理3.1の我々の証明に定理2.8が如何に使われるかについて簡単に触れておこう. 証明の第1ステップは $Aut(M_r,F^\pm)$ から $Aut(M_0,F_0^\pm)$ 又は $Aut(M^-,K)$ への単射準同型を作る事である. ($\mathfrak{g}$ が C_r 型の時は $M_0=M^-$ に注意). $f\in Aut(M_r,F^\pm)$ としよう. M_r は $\tilde{M}$ の開集合として $M^\pm$ 上の自然な二重束の構造を持つ. この際夫々のファイバーは $F^\pm$ の葉体である.

$$\begin{tikzcd} & M_r \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ M^- & & M^+ \end{tikzcd}$$

f が $F^\pm$ を不変にする事から, f は二重束のファイバーをファイバーに移す. よって f は底空間 $M^\pm$ の微分同型 $f^\pm$ を引起す. $\tilde{f}:=f^-\times f^+$ は $\tilde{M}$ の微分同型でそれの M_r 上への制限は元の f と一致する. 従って定理2.8より $\tilde{f}$ は M_0 を不変にし制限 $f_0=\tilde{f}|_{M_0}$ は M_0 の

微分同型になる。f_0 は $\mathrm{Aut}(M_0, F_0^{\pm})$ 又は $\mathrm{Aut}(M^-, K)$ に属する事が示され，対応 $f \mapsto f_0$ が単射準同型である事も容易に示される。

Bibliography

[1] J. Faraut, S. Kaneyuki, A. Koranyi, Q.-K. Lu and G. Roos, Analysis and Geometry on Complex Homogeneous Domains, Progress in Math. 185, Birkhauser, Basel, New York, 2000.

[2] S. Gindikin and S. Kaneyuki, On the automorphism group of the generalized conformal structure of a symmetric R-space, Differential Geom. Appl. 8(1998), 21-33.

[3] S. Kaneyuki, On orbit structure of compactifications of parahermitian symmetric spaces, Japan. J. Math. 13(1987), 333-370.

[4] S. Kaneyuki, On the subalgebras $\mathfrak{g}_0$ and $\mathfrak{g}_{ev}$ of semisimple graded Lie algebras, J. Math. Soc. Japan, 45(1993), 1-19.

[5] S. Kaneyuki, Compactification of parahermitian symmetric spaces and its applications, II: Stratifications and automorphism groups, to appear in Journal of Lie Theory.

[6] T. Levasseur and J.T. Stafford, Rings of differential operators on classical rings of invariants, Memoire of AMS, No. 412(1989).

[7] M. Takeuchi, Basic transformations of symmetric R-spaces, Osaka J. Math. 25(1988), 259-297.

[8] N. Tanaka, On affine symmetric spaces and the automorphism groups of product structures, Hokkaido Math. J. 14(1985), 277-351.

Department of Mathematics
Nihon Institute of Technology
Miyashiro-cho, Saitama 345-8501
Japan.

kaneyuki@hoffman.cc.sophia.ac.jp